

## Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

*Binomialverteilung*

*Poisson-Verteilung (Grenzfall der Binomialverteilung)*

## Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung

*Standardnormalverteilung (Grenzfall der Poisson-Verteilung)*

## Beispiel: Zählende Messung von $\alpha$ -Teilchen

*Es werden während der Messzeit  $n$  Teilchen emittiert;*

*Jedes Teilchen wird mit der gleichen Wahrscheinlichkeit  $p$  nachgewiesen;*

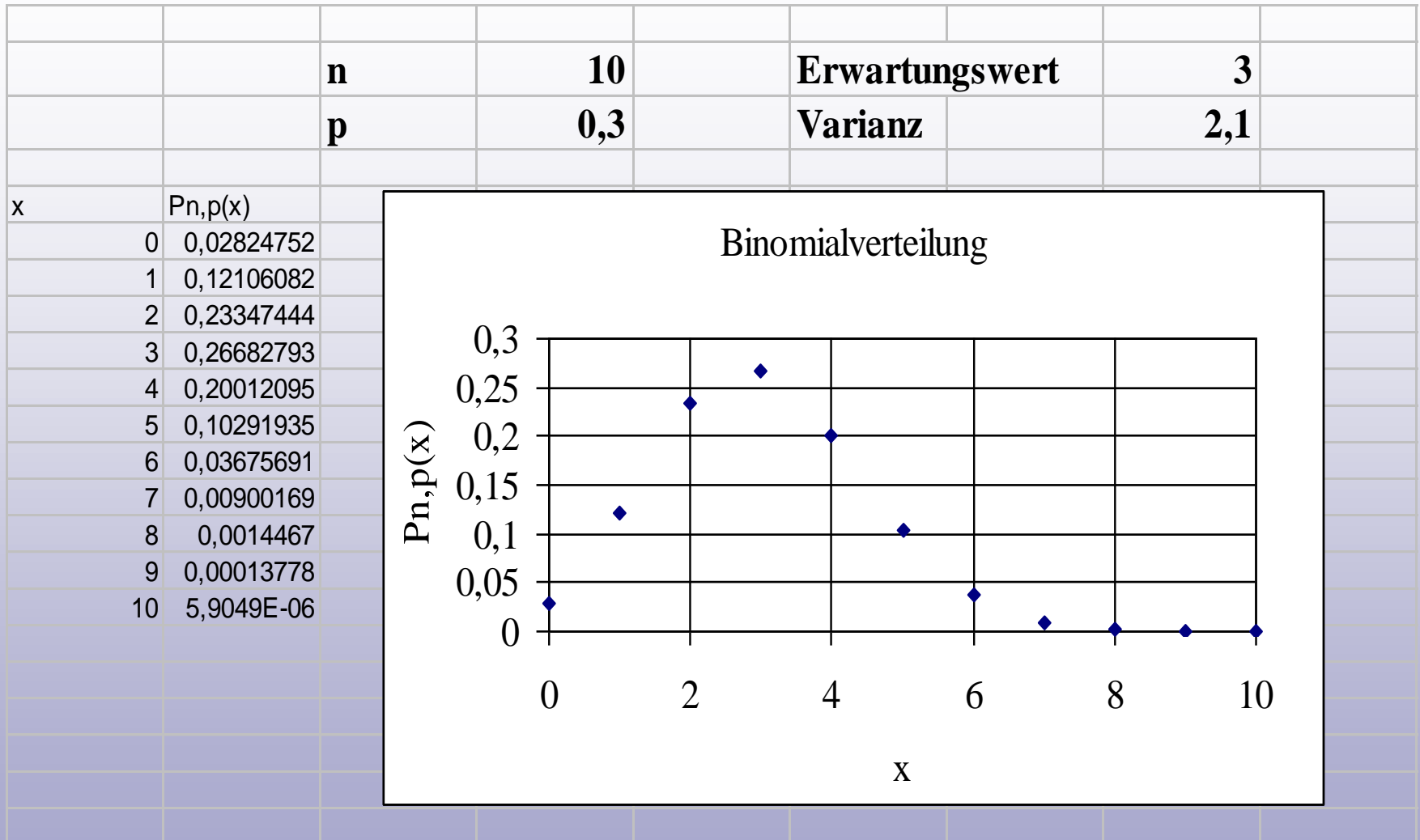
- *Erwartungswert der nachgewiesenen Teilchen:  $np$*
- *Varianz der nachgewiesenen Teilchen:  $np(1-p)$*

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung für ein Alternativmerkmal  
(z.B. Erfolg oder Mißerfolg)

*Experiment aus  $n$  unabhängigen Wiederholungen  
mit derselben Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$*

- *Erwartungswert*       $np$
- *Varianz*               $np(1-p)$

$$P_{n,p}(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$



Grenzfall der Binomialverteilung für sehr große  $n$ :

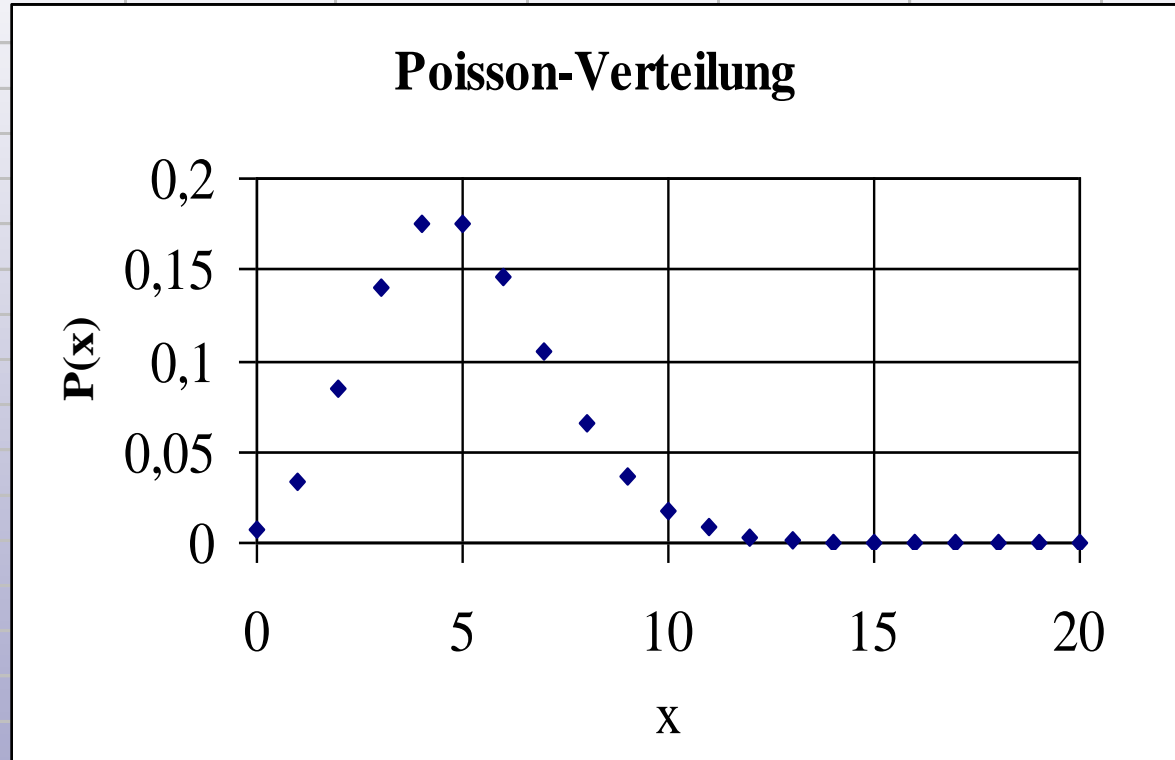
*Sehr große Zahl von Ereignismöglichkeiten  
mit derselben (sehr kleinen) Ereigniswahrscheinlichkeit*

- Erwartungswert  $\lambda$  (i.a.  $\lambda < 20$ )
- Varianz  $\lambda$

$$P(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

Erwartungswert	lambda	5
Varianz	lambda	5

x	P(x)
0	0,00673795
1	0,03368973
2	0,08422434
3	0,1403739
4	0,17546737
5	0,17546737
6	0,14622281
7	0,10444486
8	0,06527804
9	0,03626558
10	0,01813279
11	0,00824218
12	0,00343424
13	0,00132086
14	0,00047174
15	0,00015725
16	4,9139E-05



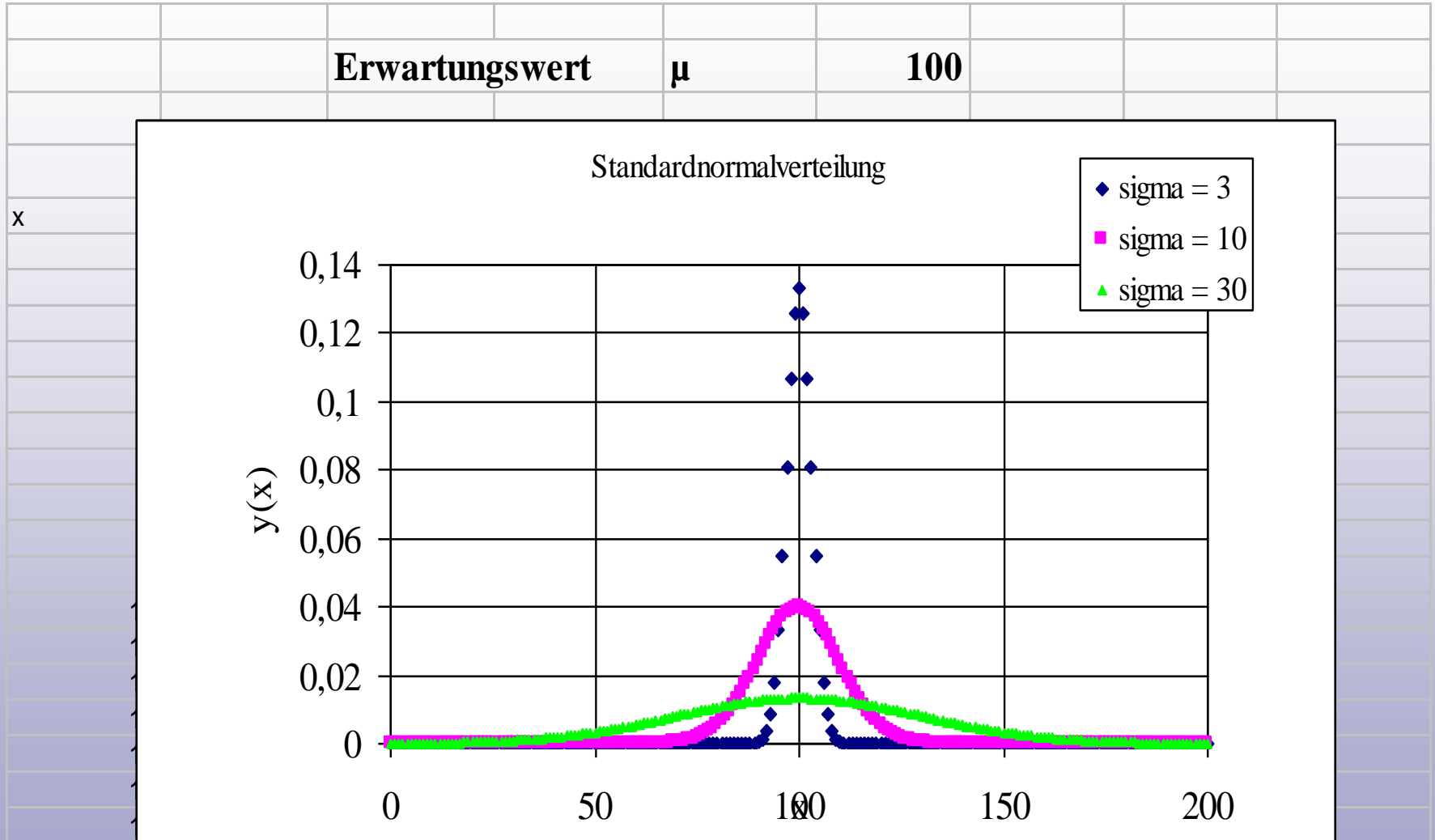
Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung:

- *Erwartungswert*  $\mu$
- *Varianz*  $\sigma^2$

$$y(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Grenzfall der Poisson-Verteilung für große Erwartungswerte und für

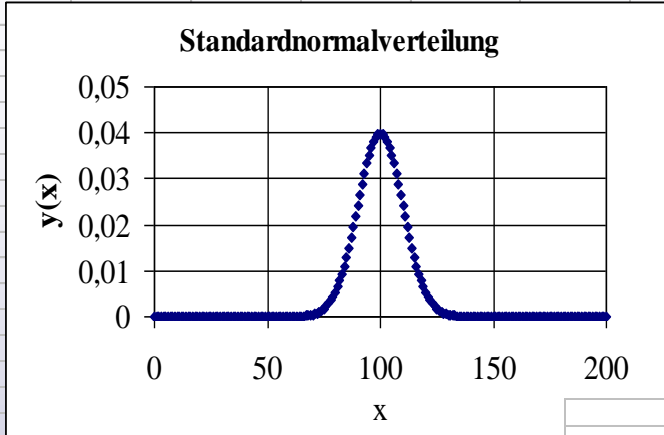
- *Varianz*  $\sigma^2 = \mu$





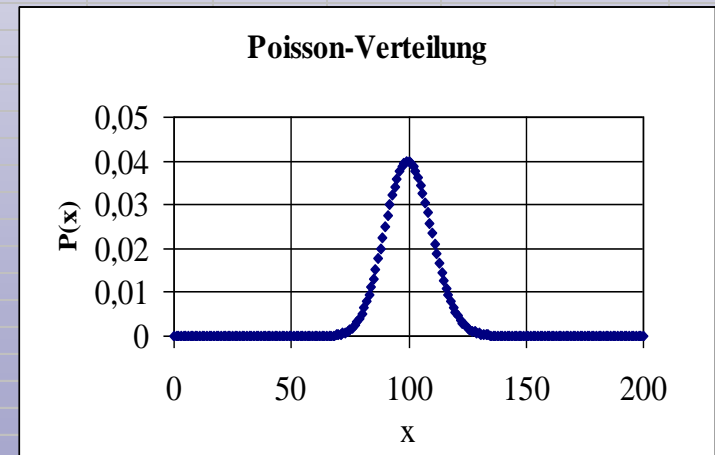
Erwartungswert	$\mu$	100
	sigma	10

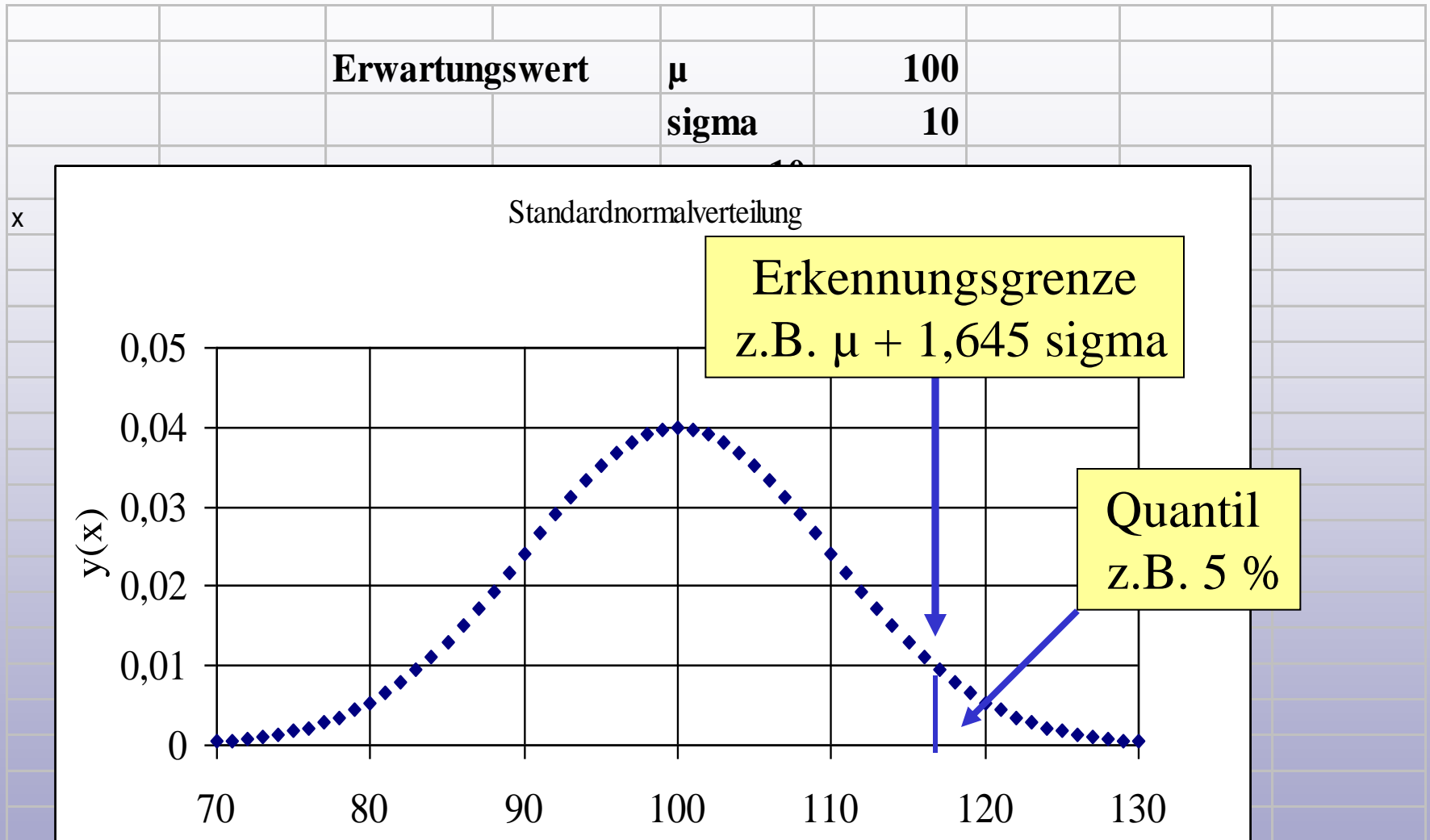
x	y(x)
0	7,69471E-24
1	2,08121E-23
2	5,57308E-23
3	1,47752E-22
4	3,87817E-22
5	1,00781E-21
6	2,5929E-21
7	6,60468E-21
8	1,66561E-20
9	4,15866E-20
10	1,02799E-19
11	2,51584E-19
12	6,09585E-19
13	1,46232E-18
14	3,47301E-18
15	8,16636E-18
16	1,90111E-17



Erwartungswert	lambda	100
Varianz	lambda	100

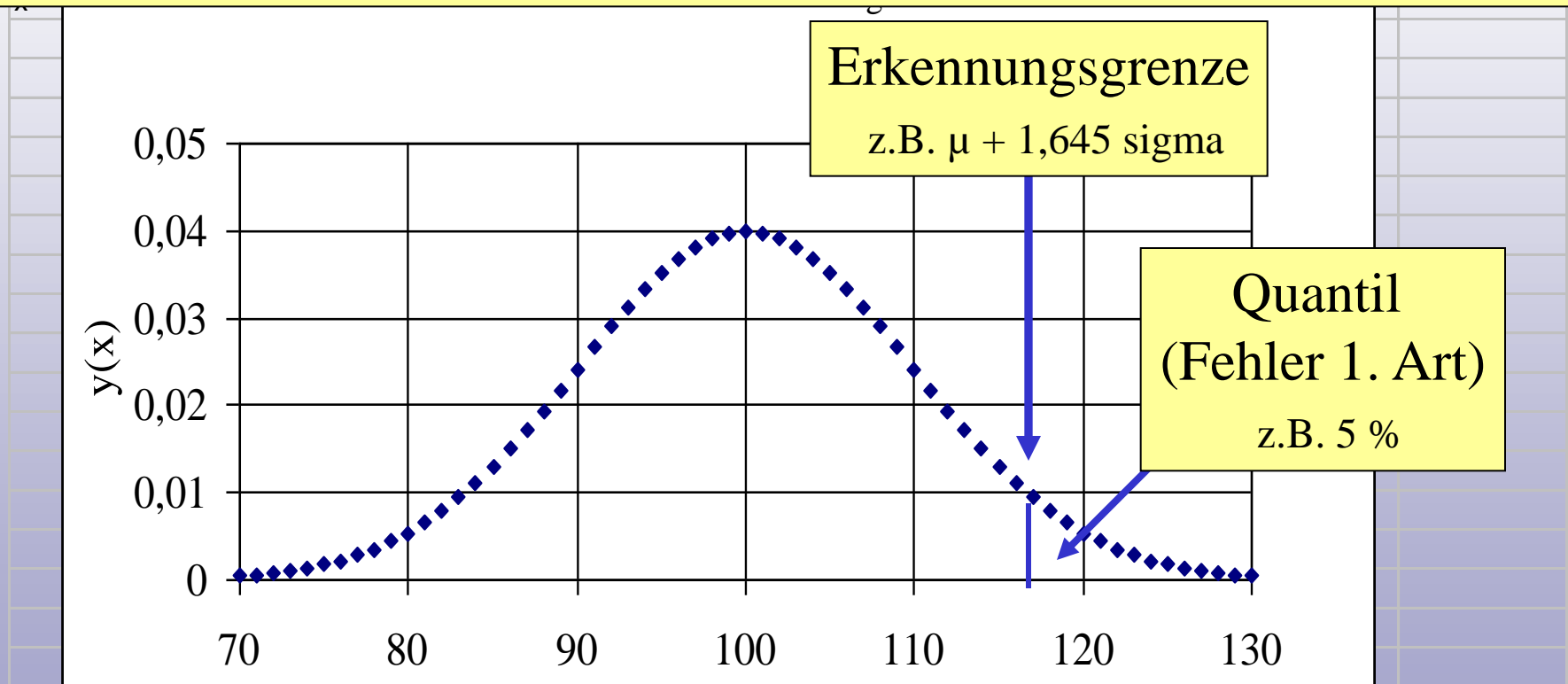
x	P(x)
0	3,7201E-44
1	3,7201E-42
2	1,86E-40
3	6,2001E-39
4	1,55E-37
5	3,1001E-36
6	5,1668E-35
7	7,3811E-34
8	9,2264E-33
9	1,0252E-31
10	1,0252E-30
11	9,3196E-30
12	7,7663E-29
13	5,9741E-28
14	4,2672E-27
15	2,8448E-26
16	1,778E-25

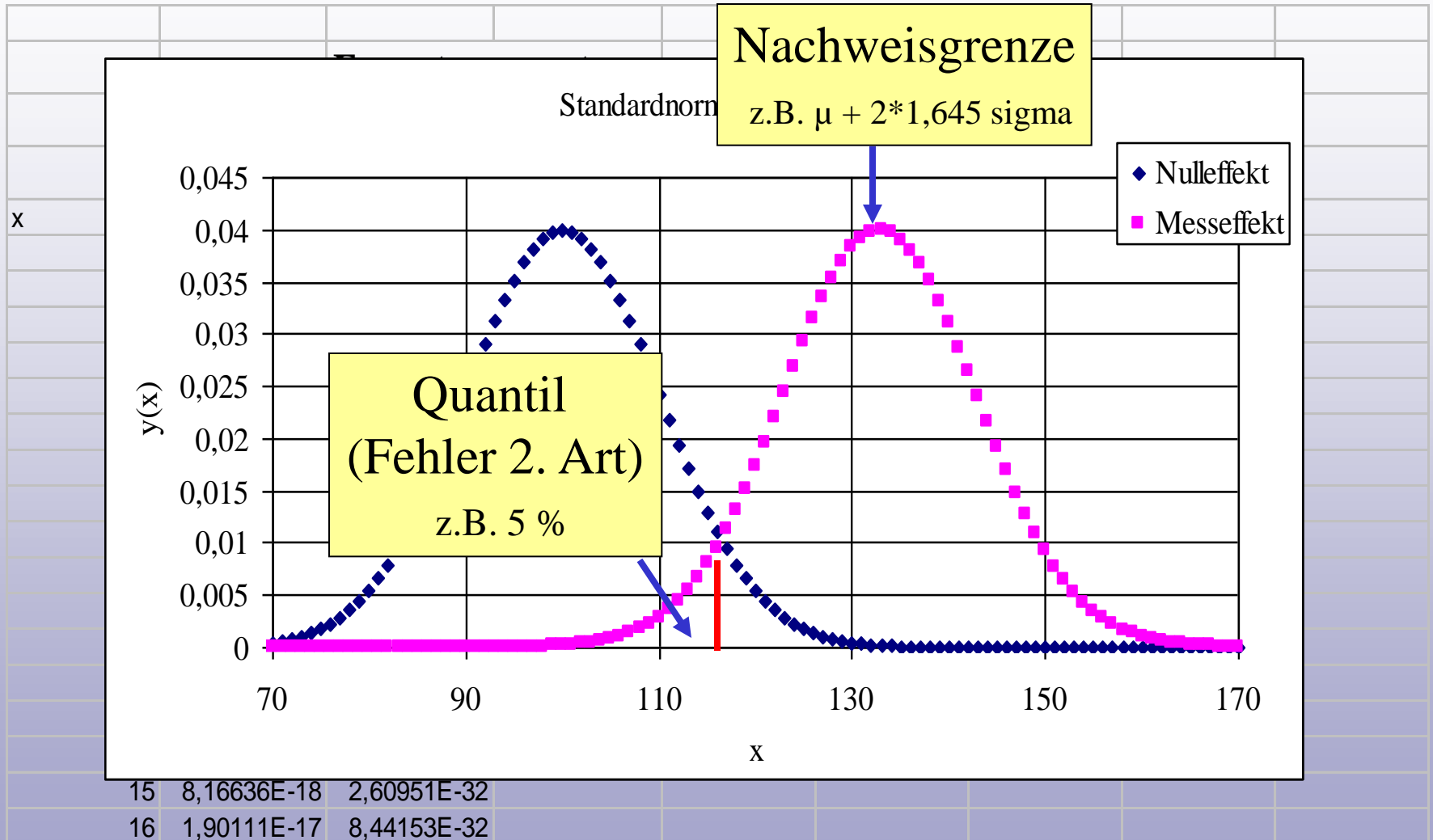




## Falsch positive Entscheidung

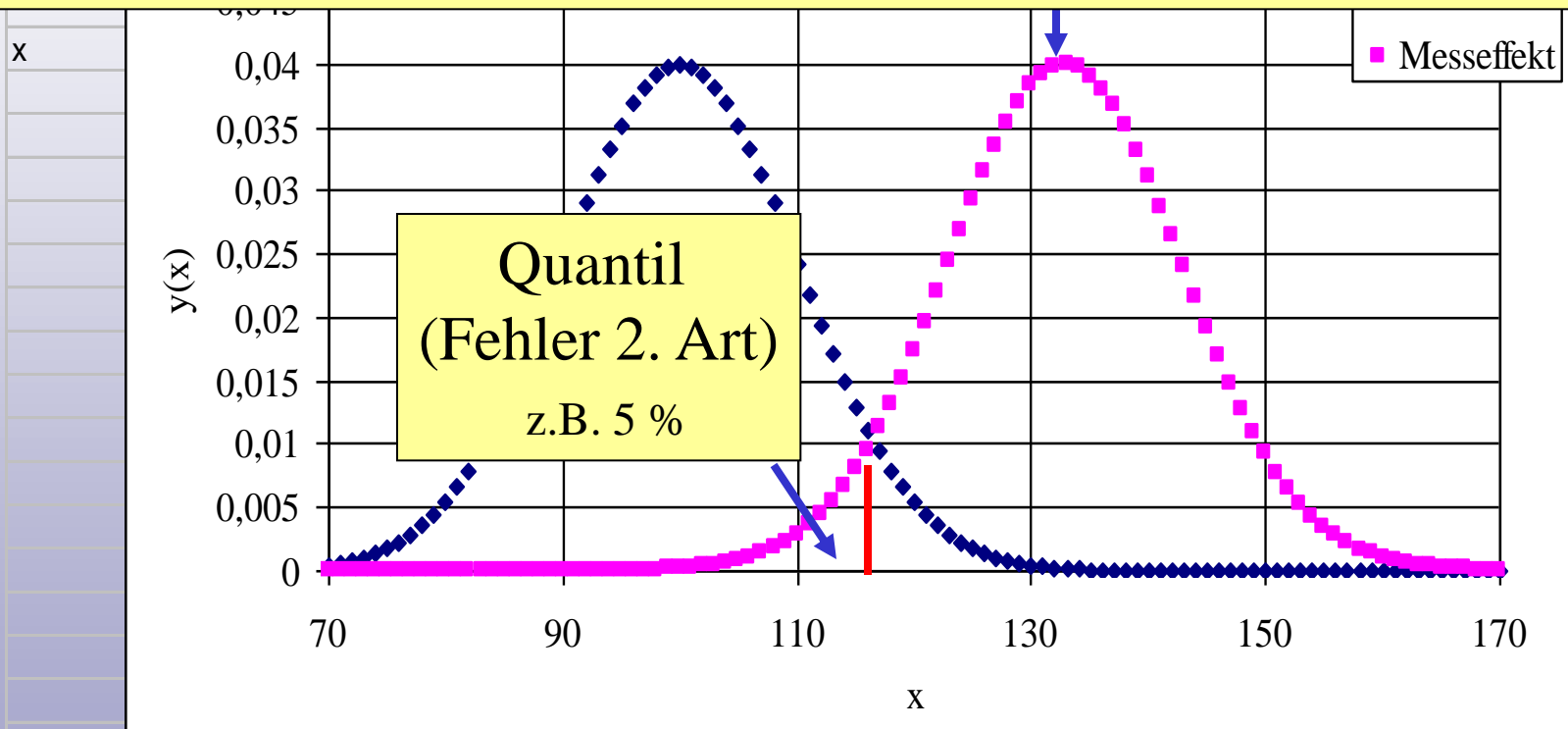
- z.B. Entscheidung dass in einer Probe eine Aktivität vorhanden ist, obwohl die Probe aktivitätsfrei ist
- oder Entscheidung dass in einem Menschen eine beruflich bedingte Cs-137-Aktivität vorhanden ist, obwohl nur die zivilisatorisch bedingte Cs-137-Aktivität vorhanden ist
- oder falsche Entscheidung dass bei einem Menschen eine bestimmte Erkrankung vorliegt





**Falsch negative Entscheidung**

- z.B. Entscheidung dass in einer Probe keine Aktivität vorhanden ist, obwohl die Probe eine Aktivität enthält
- oder Entscheidung dass in einem Menschen nur die zivilisatorisch bedingte Cs-137-Aktivität vorhanden ist obwohl eine beruflich bedingte Cs-137-Inkorporation vorliegt
- falsche Entscheidung dass bei einem Menschen eine bestimmte Erkrankung nicht vorliegt



15	8,16636E-18	2,60951E-32
16	1,90111E-17	8,44153E-32

## Fehlerkomponenten

### Messung der Körper- bzw. Organaktivität

- Zählstatistik
- Detektor bzw. Patientenpositionierung
- Individuelle Variation der Körperdimensionen
- Individuelle Variation der Aktivitätsverteilung im Körper
- Kalibrierfehler
- Fehler bei der Spektrumauswertung

### Berechnung der Dosis aus der Körper- bzw. Organaktivität

- Individuelle Variation der Körperdimensionen
- Individuelle Variation des biokinetischen Verhaltens

Fehlerquelle (Typ A: rein statistisch Typ B: nicht rein statistisch)	Mittlere Streubreiten in %		
	Niedrige Energie $E < 20 \text{ keV}$	Mittlere Energie $20 \text{ keV} < E < 100 \text{ keV}$	Höhere Energie $E > 100 \text{ keV}$
Zählstatistik (A)	50	30	7
Detektorpositionierung (B)	20	5	< 5
Background (B)	50	10	< 5
Körperdimensionen (B)	50	12	7
Absorbierende Strukturen (B)	30	15	12
Aktivitätsverteilung (B)	30	5	< 5
Kalibrierung (B)	5	5	5
Spektrumsauswertung (B)	15	5	3

## Beispiel: Messung der Aktivität im Körper

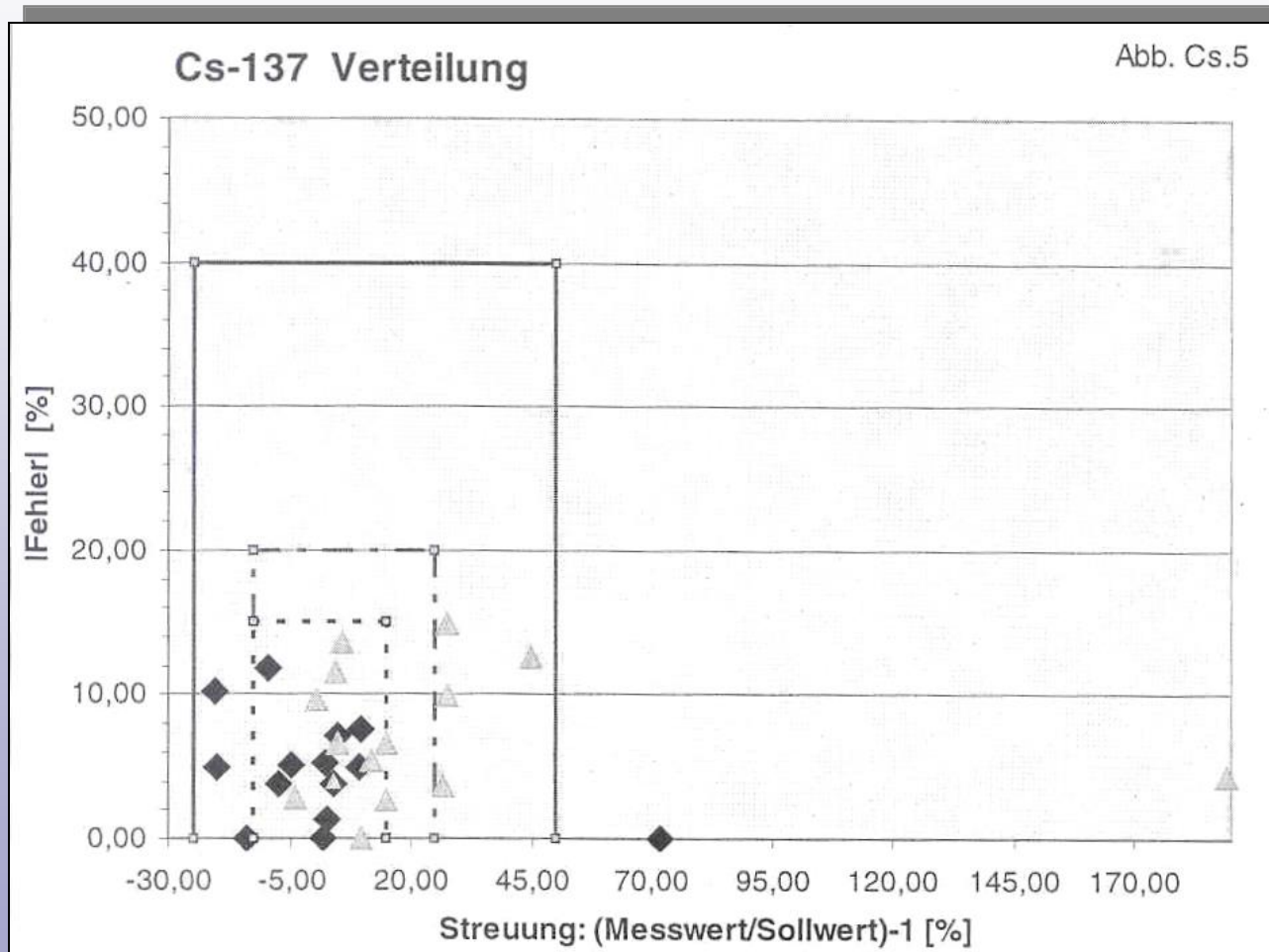
- Zählstatistik  $\sigma(Z)$
- Detektor bzw. Patientenpositionierung  $\sigma(PP)$
- Individuelle Variation der Körperdimensionen  $\sigma(KD)$
- Individuelle Variation der Aktivitätsverteilung im Körper  $\sigma(AV)$
- Kalibrierfehler  $\sigma(KF)$
- Fehler bei der Spektralauswertung  $\sigma(SA)$

$$A = f(Z, PP, KD, AV, KF, SA)$$

$$\sigma(A) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right)^2 \cdot \sigma^2(Z) + \left(\frac{\partial f}{\partial PP}\right)^2 \cdot \sigma^2(PP) + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial SA}\right)^2 \cdot \sigma^2(SA)}$$



Beispiel: Messung der Cs-137-Aktivität in einem Phantom  
(Ringvergleich des Bundesamts für Strahlenschutz)



# Beispiel: Interpretation von Messdaten der I-131-Aktivität in der Schilddrüse (Ringvergleich von IAEA/IDEAS)

